半線形発展方程式の可制御性について(制御とシステムの数理)

辻岡, 邦夫

数理解析研究所講究録
485巻 1983年 159-169

半線形発展方程式の可制御性について

埼大理　辻岡邦夫

§ 序　ヒルベルト空間Xにおいて，非線形項をもった発展方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + Bf + F(u), \quad 0<t<T & (1) \\ u(0) = u_0 \in X & (2) \end{cases}$$

の可制御性を論ずる。こゝで，AはXにおける C_0 半群 e^{tA} $(t \geq 0)$ の生成作用素とし，Bはヒルベルト空間YからXへの有界線形作用素，FはX上の非線形作用素で，リプシッツ条件

(F1)　$\| F(u) - F(v) \| \leq C \| u - v \|$

$(C$ は定数，$u, v \in X)$

をみたすものとする。$f \in L^2(0,T;Y)$ を制御とし，これに対応して (1)–(2) より定まる $u(t) = u_f(t)$ を軌道という。(F1)のもとで u_f は次の積分方程式の解である：

$$u(t) = e^{tA} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} (Bf(s) + F(u(s)))\, ds$$
$$(\ 0 \leqq t \leqq T\ )$$

以後 (1)—(2) の解とはこの積分方程式の解のことゝする。簡単のため $u_0 = 0$ とし，時刻 $T > 0$ における到達可能集合を

$$R_F(T) = \{ u_T \in X\ ;\ u_T = u_f(T),\ f \in L^2(0, T; Y) \}$$
$$R(T) = R_0(T) = \{ \int_0^T e^{(T-s)A} Bf(s)\, ds\ ;\ f \in L^2(0, T; Y) \}$$

とおく．$\overline{R_F(T)} = X$ のとき (1) は可制御であるという．§1では空間1次元の半線形熱方程式の可制御性を論じた Zhou ([1]) の概要を紹介し §2 で問題点を述べる。

§1 Zhou の結果 空間1次元における半線形熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, u) + g(x) f(t) \tag{3}$$
$$(\ 0 < x < \ell,\quad 0 < t < T\ )$$

に初期条件

$$u(x, 0) = 0 \tag{4}$$

および境界条件

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \tag{5}$$

を付したものについての可制御性が $X = L^2(0, \ell)$，$Y = R^1$

$Au = u''$ (導関数は $L^2(0, \ell)$ における超関数の意味)

$$u(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}(Bf(s) + F(u(s)))ds$$

以後 (1)−(2) の解とはこの積分方程式の解のことゝする。簡単のため $u_0 = 0$ とし，時刻 $T > 0$ における到達可能集合を

$$R_F(T) = \{u_T \in X \ ; \ u_T = u_f(T), \ f \in L^2(0,T;Y)\}$$
$$R(T) = R_0(T) = \left\{\int_0^T e^{(T-s)A}Bf(s)ds \ ; \ f \in L^2(0,T;Y)\right\}$$

とおく．可制御性を論じるときには

$$(\mathrm{F}\,2) \qquad \sup_{u \in X} \|F(u)\| < \infty$$

なる条件を置く。 $\overline{R_F(T)} = X$ のとき，(1) は可制御であるという。§1 では空間1次元の半線形熱方程式の可制御性を論じた Zhou ([1]) の結果を紹介し，§2 でその問題点を述べる。

§1 Zhou の結果 空間1次元における半線形熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,u) + g(x)f(t) \qquad (3)$$
$$(0 < x < \ell, \quad 0 < t < T)$$

に初期条件

$$u(x,0) = 0 \qquad (4)$$

および境界条件

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \qquad (5)$$

を付したものについての可制御性が

$$X = L^2(0, \ell), \quad Y = R^1$$

$Au = u''$ (導関数は $L^2(0,\ell)$ での超関数の意味で)

$D(A) = H^2(0, \ell) \cap \{u \,;\, u(0) = u(\ell) = 0\}$

$Bf = g(x)f, \quad g(x) \in L^2(0, \ell)$

として扱える。A はXにおける自己共役作用素であり，固有値 $\lambda_n = -\dfrac{\pi^2 n^2}{\ell^2}$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) および対応する正規化された固有ベクトル $\varphi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\ell}} \sin \dfrac{\pi n}{\ell} x$ を持つ。

(F1) および (F2)に対応して

$$F(x, u) \quad : [0, \ell] \times X \longrightarrow X$$

について，次の (F1)', (F2)' の仮定を置く.

(F1)' $\quad \| F(x, u) - F(x, v) \| \leq C \| u - v \|$

(F2)' $\quad \sup\limits_{u \in X} \| F(x, u) \| < \infty$

g に関して，次の仮定をする.

仮定(g) ある $M_g > 0$ と整数 $I > 0$ が存在して

$$|g_n| \geq M_g |\lambda_n|^{-I} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

たゞし，こゝで $g_n = (g, \varphi_n)_{L^2(0,\ell)}$

<u>定理 1</u> (Zhou [1]) (F1)', (F2)' および仮定(g)のもとで (3)-(4)-(5) は可制御である.

この定理の証明は次の様に行われた： 先ず $F(x, u)$ を Fourier 展開して

$$F(x,u)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(u)\varphi_n(x)$$

となるが (F2)$'$ より

$$\sup_{u\in X}\|F(x,u)\|^2=\sup_{u\in X}\sum_{n=1}^{\infty}|F_n(u)|^2$$

こゝで

$$\hat{F}^{(N)}(x,u)=\sum_{n=1}^{N}F_n(u)\varphi_n(x)$$

とおけば

$$\sup_{u\in X}\|\hat{F}^{(N)}(x,u)-F(x,u)\|^2 = \sup_{u\in X}\sum_{n=N+1}^{\infty}|F_n(u)|^2\to 0 \quad (N\to\infty) \qquad \cdots (6)$$

$$\begin{cases} \text{第一段} & \text{任意の } N>0,\ k>0 \text{ に対して} \\ & D=D(e^{kA^{\frac{1}{2}}})\subset R_{\hat{F}^{(N)}}(T) \\ \text{第二段} & D\subset\overline{R_F(T)} \end{cases}$$

が示されれば $\overline{D}=X$ だから $\overline{R_F(T)}=X$

すなわち (3)-(4)-(5) は可制御である。

第一段 ⇒ 第二段 X値関数として

$$F^{(N)}(u)=F^{(N)}(\cdot,u),\quad F(u)=F(\cdot,u)$$

$$u(t)=u(\cdot,t),\quad g=g(\cdot)$$

などのようにかく。(6)により次のことがいえる：

$\forall\varepsilon>0,\ \forall u_T\in D\quad \exists N.$

$$\sup_{\substack{0\le t\le T\\ u\in X}}\left\|\int_0^t e^{(t-s)A}(\hat{F}^{(N)}(u(s))-F(u(s)))ds\right\|<\varepsilon$$

オ一段より $u_T \in R_{\hat{F}^{(N)}}(T)$ だから

$\exists\, \hat{u}(t),\ \hat{f}(t)$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} \hat{u}(T) = u_T \\ \hat{u}(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}\left(g\hat{f}(s) + \hat{F}^{(N)}(\hat{u}(s))\right)ds \end{cases}$$

$u = u_{\hat{f}}$ とおくと

$$u(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}\left(g\hat{f}(s) + F(u(s))\right)ds$$

$$\therefore\ \|u(t) - \hat{u}(t)\|$$

$$= \left\| \int_0^t e^{(t-s)A}\left(\hat{F}^{(N)}(\hat{u}(s)) - F(u(s))\right)ds \right\|$$

$$\leq \left\| \int_0^t e^{(t-s)A}\left(\hat{F}^{(N)}(\hat{u}(s)) - F(\hat{u}(s))\right)ds \right\|$$

$$+ \left\| \int_0^t e^{(t-s)A}\left(F(\hat{u}(s)) - F(u(s))\right)ds \right\|$$

$$\leq \varepsilon + C\int_0^t \|\hat{u}(s) - u(s)\|ds$$

Gronwall の不等式により

$$\|u(t) - \hat{u}(t)\| \leq \varepsilon e^{Ct} \leq \varepsilon e^{CT}$$

$t = T$ とおいて

$$\|u(T) - u_T\| \leq \varepsilon e^{CT}$$

オ一段を示すため Fattorini - Russell ([2]) のモーメント問題についての結果より、次の命題が導かれる：

$$\forall u \in L^2(0,T:X),\quad \exists f \in L^2(0,T:Y)$$

s.t.

$$\begin{cases} u_T = \int_0^T e^{(T-s)A}(gf(s) + \hat{F}^{(N)}(u(s)))ds & \cdots (7) \\ \|f\| \leq C_1(u_T) + C_2(N,F) & \cdots (8) \end{cases}$$

これが モーメント問題 に帰着されるのは

$$u_T = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \varphi_n$$

i.e.,

$$\int_0^T e^{(T-s)\lambda_n}(g_n f(s) + \hat{F}_n^{(N)}(u(s)))ds = \beta_n$$

より

$$\int_0^T e^{(T-s)\lambda_n} f(s)\,ds = c_n \equiv \frac{1}{g_n}\{\beta_n - \int_0^T \hat{F}_n^{(N)}(u(s))ds$$

とおけることから示される.

任意の $u_T \in D$に対して

$$\begin{cases} u_T = \int_0^T e^{(T-s)A}(gf_{k+1}(s) + \hat{F}^{(N)}(u_k(s))ds & \cdots (9) \\ u_{k+1}(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}(g f_{k+1}(s) + F^{(N)} & \cdots (10) \\ \|f_k\| \leq C(u_T, N, F) & (11) \end{cases}$$

をみたす $\{u_k\} \subset L^2(0,T:X)$, $\{f_k\} \subset L^2(0,T:Y)$

を選ぶことができる 「(11)により $\{f_k\}$ は $L^2(0,T;Y)$ の有界列だから，部分列をとれば弱収束する。この部分列を同じ $\{f_k\}$ で表わすことにする。写像

$$f \in L^2(0,T;Y) \to \int_0^t e^{(t-s)A} g f(s) ds \in L^2(0,T;X)$$

は完全連続だから $\{u_k\}$ は $L^2(0,T;X)$ で強収束する。

Zhou によれば $\{f_k\}$, $\{u_k\}$ の $L^2(0,T;Y)$, $L^2(0,T;X)$ における弱，強極限を f, u とすると (9)，(10)で極限移行ができて

$$u_T = \int_0^T e^{(T-s)A}(g f(s) + \hat{F}^{(N)}(u(s)))ds$$

$$u(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}(g f(s) + \hat{F}^{(N)}(u(s)))ds$$

i.e

$$u_T \in R_{\hat{F}^{(N)}}(T)$$ 」

Remark 上の証明中「… 」で ～～ を施した部分を詳しくいえば $\{f_k\}$ の弱収束する部分列 $\{f_{n_k}\}$ が存在し (10)より

$$u_{n_k}(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}(g f_{n_k}(s) + \hat{F}^{(N)}(u_{n_k}(s)))ds$$

$k \to \infty$ として

$$u(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}(g f(s) + \hat{F}^{(N)}(u(s)))ds$$

は確かであるが (9) より

$$u_T = \int_0^T e^{(T-s)A}(g f_{n_k}(s) + \hat{F}^{(N)}(u_{n_k-1}(s)))ds$$

となり，右辺第2項において $k \to \infty$ のとき 極限移行ができない．従って $u_T \in R_{\hat{F}}(T)$ が結論されない．

§2 問題提起 (F1)(F2) のもとで (1) の可制御性が 線形系

$$\frac{du}{dt} = Au + Bf \qquad 0<t<T \qquad (12)$$

の可制御性に帰着されるのではないか，すなわち

$$(Z) \qquad \overline{R(T)} = X \Rightarrow \overline{R_F(T)} = X$$

が成り立つのではないかと．筆者は試みたが．講演中，神戸大学の中桐氏にその証明の誤まりを指摘された．又、大阪大学の坂和，藤井の両氏には文献 ([3]) を教えて頂いた。これによると，A が解析半群の生成作用素のとき，次が成り立つ。

「任意の $x \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対して，十分小さい $T>0$ をとれば $u_f(T) \in R_F(T)$ が存在して

$$\|x - u_f(T)\| < \varepsilon$$」

証明は次の通り： $\varepsilon > 0$ に対して $T>0$ を十分小さくとれば

$$\int_0^T \| e^{(T-s)A} F(u(s)) \| ds < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (13)$$

が，すべての $u \in L^2(0,T;X)$ に対して成り立つ．e^{tA} の解析性と (12) の可制御性により，$\overline{R(T)} = X$ であるから $f \in L^2(0,T;Y)$ が存在して

$$\left\| x - \int_0^T e^{(T-s)A} B f(s) ds \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (14)$$

が成り立つ。(13)，(14) により

$$\begin{aligned} &\| x - u_f(T) \| \\ &= \left\| x - \int_0^T e^{(T-s)A} B f(s) ds - \int_0^T e^{(T-s)A} F(u(s)) ds \right\| \\ &\le \left\| x - \int_0^T e^{(T-s)A} B f(s) ds \right\| + \left\| \int_0^T e^{(T-s)A} F(u(s)) ds \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad . \end{aligned}$$

上の結果は

$$\overline{R(T)} = X \Rightarrow \bigcup_{T>0} \overline{R_F(T)} = X$$

と表わせる。与えられた $T>0$ に対して，(Z) 又は Zhou の結果が正しいかどうかは未解決である。

References

[1] Zhou, X. Z. A note on approximate controllability for semilinear one-dimensional

heat equation, Appl. Math. Optim 8 : 275-285 (1982).

[2] Fattorini, H. O., Russell, D.L., Exact controllability theorem for linear parabolic equations in one space dimension, Arch. Rat. Mech. Anal. 43 : 272-292. (1971)

[3] Fujii, N, Sakawa, Y, Controllability for nonlinear differential equations in Banach space, Automatic Control Theory and Applications, Vol. 2. No. 2, 44-46 May (1974).